求解时变非线性优化的平滑预设时间零化神经网络及其应用

仲国民[1,2]，林锐[1]，肖里坤[1]，孙明轩[1]
（1.浙江工业大学信息工程学院，浙江 杭州 310023；2.浙江工业大学先进技术研究院，浙江 杭州 310014）

摘要：现有预设时间零化神经网络在求解时变非线性优化问题时，其计算误差对时间的导数在预设时刻不连续，实际应用中易导致执行器抖动。为此，提出平滑预设时间零化神经网络，实现误差轨迹在预设时刻导数连续。进一步提出全程平滑预设时间零化神经网络，确保误差轨迹在初始时刻的平滑性，实现全域平滑过渡。理论分析两种网络计算误差的预设时间收敛性与平滑性，并讨论平滑增益对网络收敛性能的影响。针对存在初始误差的冗余机械臂重复运动规划问题，提出一种平滑重复运动规划方案，并采用所提平滑预设时间零化神经网络求解。该计算方案在实现机械臂末端位置误差预设时间收敛的同时，保证机械臂的平稳运行。时变非线性优化与冗余机械臂的仿真结果验证了所提网络与重复运动规划计算方案的有效性。

关键词：非线性优化；预设时间收敛；零化神经网络；重复运动规划
中图分类号：TP183
文献标志码：A
doi：10.11959/j.issn.1000−436x.TXXB260168

Smooth prescribed-time zeroing neural network for solving time-varying nonlinear optimization and its applications

Zhong Guomin[1,2], Lin Rui[1], Xiao Likun[1], Sun Mingxuan[1]
1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China
2. Institute for Frontiers and Interdisciplinary Sciences, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China

Abstract: In existing prescribed-time zeroing neural networks, the derivative of the computational error with respect to time was found to be discontinuous at the prescribed time when solving time-varying nonlinear optimization problems, which could easily lead to actuator chattering in practical applications. Therefore, a smooth prescribed-time zeroing neural network was proposed, which ensured that the derivative of the error trajectory remained continuous at the prescribed time. Furthermore, a whole-process smooth prescribed-time zeroing neural network was proposed, which ensured the smoothness of the error trajectory at the initial time and thereby achieved a smooth transition over the entire time domain. Theoretical analysis was conducted on the prescribed-time convergence and smoothness of the computational error for the two proposed networks, and the impact of the smoothing gain on the networks' convergence performance was discussed. For the repetitive motion planning problem of a redundant manipulator with initial error, a smooth repetitive motion planning scheme was proposed and solved using the proposed smooth prescribed-time zeroing neural network. The smooth operation of the manipulator was ensured by this computational scheme, and convergence of the end-effector position error was achieved. Simulation results of time-varying nonlinear optimization and the redundant manipulator validate the effectiveness of the proposed networks and repetitive motion planning computational scheme.

Key words: nonlinear optimization, prescribed-time convergence, zeroing neural network, repetitive motion planning

收稿日期：2026−04−01；**修回日期：**2026−05−30
通信作者：仲国民，zgm@zjut.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金资助项目（No.62073291）
Foundation Item：The National Natural Science Foundation of China (No.62073291)

0　引言

零化神经网络（zeroing neural network, ZNN）起源于霍普菲尔德（Hopfield）神经网络，其凭借并行计算与分布式存储等特点，被广泛应用于求解各类时变问题，如矩阵逆运算[1]、矩阵方程[2]以及非线性优化[3]。由于该网络利用了时间导数信息，理论上可实现时变计算问题的精确求解。收敛性能是评价ZNN模型的重要标准，而激活函数（activation function, AF）是决定该性能的核心要素。Zhang等[4]首先提出了采用线性激活函数的ZNN，实现了系统误差的全局指数收敛。为提升收敛速度，具备有限时间收敛性质的激活函数被提出[5]。此类激活函数可确保误差在有限时间内收敛至零，但收敛时间依赖于系统初始状态，这给神经网络求解过程带来不确定因素。为克服这一问题，固定时间稳定系统[6]和预定义时间稳定系统[7]被提出，前者将系统误差的收敛时间限制在与初始状态无关的上界内，后者则可依据需求直接设定收敛时间上界。然而，上述有限时间、固定时间及预定义时间稳定系统均无法实现对收敛时刻的精确设计。

预设时间稳定性理论[8]作为一项开创性工作，因其实现了系统状态在指定时刻精确收敛至平衡点而备受关注。基于该理论，现有预设时间稳定系统的设计思路可总结为3类：第一类基于时间缩放，通过时间尺度变换，将原系统有限时间区间上的预设时间稳定性问题转化为无限时间区间上的经典稳定性问题。Shakouri等[9]据此提出一种统一的设计框架，实现了输入和状态约束下未知非线性系统的预设时间稳定。第二类基于状态缩放，利用状态缩放函数在预设时刻的无限增益特性实现收敛。Zhang等[10]提出一种基于可调参数缩放二次型李雅普诺夫函数的自适应预设时间稳定方法，在实现预设时间稳定的同时，所需增益更小、能耗更低。第三类基于时间–空间缩放，通过对时间和状态同时进行尺度变换，将预设时间稳定问题转化为可在有限/固定时间框架下分析的形式，并有效避免预设时刻增益趋于无穷的问题。Orlov等[11]通过比例时空缩放，提出一种自主预设时间稳定策略，将固定时间稳定方法重构为具有常数增益的输出反馈形式。此外，非缩放类方法[12-13]也为预设时间稳定系统的设计提供了重要思路。受上述研究的启发，预设时间稳定性理论被引入零化神经网络研究，通过设计满足特定条件的激活函数，构造出一系列具有预设时间收敛性质的ZNN模型，并成功应用于多机器人位置规划[14]及时变复西尔维斯特（Sylvester）方程求解[15]。尽管现有预设时间ZNN在收敛性能与鲁棒性能上取得了显著进展，但系统状态轨迹的平滑性问题尚未得到重视。状态轨迹非平滑易在工程中引发机械振动，不仅加剧执行器磨损、降低控制精度，还可能引发结构共振，影响系统的安全稳定运行。因此，研究兼具预设时间收敛与轨迹平滑特性的ZNN模型具有重要的理论意义与工程价值。

冗余机械臂的自由度数目大于完成特定任务所需的最小自由度，其重复运动规划需在速度层实时优化关节角速度以跟踪时变末端轨迹，本质上可归纳为时变优化问题。冗余特性使机械臂在完成既定轨迹的同时兼顾障碍物避让与奇异位姿的规避[16]，但在闭合路径跟踪任务中易因多组关节角对应同一末端位置而出现关节角漂移，进而可能导致关节损坏甚至构成安全隐患。为此，可将冗余机械臂的重复运动规划重构为二次规划优化问题，将任务需求转化为优化指标与约束条件[17]。由于零化神经网络求解时变问题的高效性，基于ZNN的方法被广泛应用于机械臂运动规划[18-19]。现有方法大多未考虑初始位置偏差，往往假定机械臂末端执行器的初始位置与期望轨迹起始点重合。然而，实际工程中初始位置偏差难以避免。虽然Sun等[20]在考虑初始位置偏差的情况下提升了模型性能，但末端执行器位置误差的收敛性这一重要指标尚未得到充分关注[21-22]。

针对以上问题，本文提出了两种兼顾预设时间收敛与轨迹平滑性的ZNN模型，分别实现了预设时刻的平滑收敛和初始时刻到预设时刻的平滑过渡，显著提升了ZNN在实际工程中的应用价值。此外，本文针对初始位置偏差下的冗余机械臂重复运动规划问题，通过在运动学约束中引入约束修正函数，提出一种平滑重复运动规划计算方案。本文主要贡献如下。

（1）针对现有预设时间ZNN在预设时刻收敛不平滑的问题，设计一种平滑预设时间激活函数，构建平滑预设时间ZNN（smooth prescribed-time ZNN, SPTZNN）模型。理论分析SPTZNN模型的预设时间收敛性与轨迹平滑性，并讨论激活函数增益对平滑收敛特性的影响。

（2）为实现计算误差轨迹在初始时刻与预设时

刻的双端平滑，进一步提出一种全程平滑预设时间激活函数，构建全程平滑预设时间ZNN（whole-process smooth prescribed-time ZNN, WP-SPTZNN）模型。理论分析WP-SPTZNN模型的预设时间收敛性与轨迹平滑性，说明激活函数增益对全程平滑收敛特性的影响，并证明有界噪声下该模型仍能保证误差在预设时刻的平滑收敛。

（3）针对带初始位置偏差的冗余机械臂重复运动规划问题，考虑末端执行器位置误差的收敛性，提出一种平滑重复运动规划方案，采用WP-SPTZNN作为求解器。在存在初始位置偏差的情况下，实现末端执行器位置误差在预设时间处的平滑收敛，确保机械臂的稳定运行。

1 问题描述

考虑时变非线性优化（time-varying nonlinear optimization, TVNO）问题：

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{x}(t)} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)\\ \text{s.t. } \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)=0\end{cases} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$为待求解的未知向量，$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)$:$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$为非线性目标函数，$\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)$:$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$为非线性约束函数。假设$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)$和$\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)$连续可微，且TVNO问题式(1)为凸优化问题。根据最优化理论，该问题存在唯一解。为找到满足TVNO问题的理论解$\boldsymbol{x}^*(t)$，采用拉格朗日乘子法，构造TVNO问题的拉格朗日函数$L\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right)=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)$，其中，$\boldsymbol{\lambda}(t)\in\mathbb{R}^m$为拉格朗日乘子向量，上标T代表矩阵的转置。最优解$\boldsymbol{x}(t)$和拉格朗日乘子向量$\boldsymbol{\lambda}(t)$必须满足如下最优性条件：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right)}{\partial \boldsymbol{x}(t)}=0\\ \dfrac{\partial L\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right)}{\partial \boldsymbol{\lambda}(t)}=\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)=0\end{cases} \tag{2}$$

式(2)可以重新表示为：

$$\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)}{\partial \boldsymbol{x}(t)}+\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)}{\partial \boldsymbol{x}(t)}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t)\\ \boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{x}(t),t\right)\end{bmatrix}=0 \tag{3}$$

至此，TVNO问题式(1)便转化为时变矩阵方程式(3)。零化神经网络通过设计误差动态方程，使误差向量各分量收敛至零，进而实现对时变矩阵方程的求解。为求解式(3)，定义误差函数$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)$，其中$\boldsymbol{y}(t)=\left[\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\lambda}(t)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$。常规ZNN模型的误差动态方程为：

$$\dot{\boldsymbol{E}}(t)=-\varepsilon\cdot\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{E}(t)\right) \tag{4}$$

其中，$\varepsilon>0$为可调参数，用于调整ZNN模型的收敛速度，$\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{E}(t)\right)$:$\mathbb{R}^{m+n}\to\mathbb{R}^{m+n}$为激活函数。将误差函数$\boldsymbol{E}(t)$代入式(4)，可以得到求解TVNO问题式(1)的ZNN模型。

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)\dot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)=-\varepsilon\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)\right) \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)=\dfrac{\partial \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)}{\partial \boldsymbol{y}(t)}$，$\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)=\dfrac{\partial \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)}{\partial t}$。

激活函数的选取影响ZNN模型的收敛性能，常用的典型预设时间激活函数形式如下。

（1）预设时间激活函数Ⅰ（prescribed-time AF-Ⅰ, PTAF Ⅰ）[23]：

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{T_p-t}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ x, & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{6}$$

（2）预设时间激活函数Ⅱ（prescribed-time AF-Ⅱ, PTAF Ⅱ）[24]：

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{\exp(x)-1}{\left(T_p-t\right)\exp(x)}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ x, & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{7}$$

（3）预设时间激活函数Ⅲ（prescribed-time AF-Ⅲ, PTAF Ⅲ）[25]：

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{T_p-t}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ x+|x|^p\operatorname{sgn}(x)+\xi\operatorname{sgn}(x), & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{8}$$

其中，T_p为预先设定的收敛时间，ξ为可调参数，sgn(·)为符号函数。PTAF Ⅰ为基础形式，可实现神经网络的计算误差在与系统初始状态无关的预设时间处收敛到零。PTAF Ⅱ引入指数函数以压缩输入动态范围，降低网络对扰动的敏感度。与PTAF Ⅰ相比，PTAF Ⅲ在$t\in\left[T_p,+\infty\right)$段引入幂次项和符号项，进一步增强网络的噪声抑制能力。

上述激活函数均能实现神经网络的计算误差在预设时间处收敛至零。然而，误差导数在预设时间处不连续，导致误差收敛曲线不平滑，进而可能在硬件实现时引发抖动，影响系统运行的平稳性。

2　平滑预设时间ZNN

为实现计算误差在预设时间处的平滑收敛，本节设计两种平滑预设时间激活函数，构建相应的SPTZNN与WP-SPTZNN模型以求解TVNO问题。理论证明两种模型计算误差的预设时间收敛性与轨迹平滑性，并探讨平滑增益对平滑性的影响；在此基础上，进一步对WP-SPTZNN模型进行鲁棒性分析。

2.1　平滑预设时间ZNN模型

为实现TVNO问题的预设时间求解，并避免实际应用时因加速度突变引发执行器抖振，本节提出平滑预设时间ZNN模型，通过保证误差轨迹在预设时刻的二阶可导，将光滑性提升到加速度层面，并对模型的性能进行理论分析。

提出以下平滑预设时间激活函数：

$$\phi_1(x)=\begin{cases}\dfrac{kx}{T_p-t}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ \mathcal{F}(x), & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases}\tag{9}$$

其中，$k>2$为平滑增益，$\mathcal{F}(x)$为单调递增的奇函数，可以根据ZNN模型所需性能进行调整。将式(9)代入式(5)中，得到一种具有平滑预设时间收敛特性的SPTZNN模型。

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\begin{cases}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)\right)\dot{\boldsymbol{y}}(t)-\\ \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)-\varepsilon\dfrac{k\boldsymbol{E}(t)}{T_p-t}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)\right)\dot{\boldsymbol{y}}(t)-\\ \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)-\varepsilon\mathcal{F}\left(\boldsymbol{E}(t)\right), & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases}\tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{I}\in\mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$为单位矩阵。

定理1　采用SPTZNN模型式(10)求解TVNO问题式(1)，对于$k>2$及有限初值$\boldsymbol{E}(0)$，式(10)的计算误差可在预设时间T_p处收敛于0，且误差轨迹在区间$(0,+\infty)$上至少具有C^2连续性。

证明　构造李雅普诺夫函数$V_i(t)=\dfrac{1}{2}e_i^2(t)$，其关于时间的导数$\dot{V}_i(t)$可以计算为：

$$\dot{V}_i(t)=e_i(t)\dot{e}_i(t)=-\varepsilon e_i(t)\phi_1\left(e_i(t)\right)\tag{11}$$

由于$\phi_1\left(e_i(t)\right)$是单调递增的奇函数，因此式(10)是全局渐近收敛的。考虑到预设时间激活函数的分段特性，下面按不同时间区间分别进行讨论。

（1）当$t\in\left[0,T_p\right)$时，将式(9)代入式(11)可得：

$$\dot{V}_i(t)=-\varepsilon\frac{k}{T_p-t}e_i^2(t)=-2\varepsilon\frac{k}{T_p-t}V_i(t)\tag{12}$$

对式(12)积分可得：

$$V_i(t)=V_i(0)\left(\frac{T_p-t}{T_p}\right)^{2\varepsilon k}\tag{13}$$

因此，当$t\to T_p$时，$V_i(t)\to 0$，即$e_i(t)\to 0$。

（2）当$t\in\left[T_p,+\infty\right)$时，$\dot{V}_i(t)=-\varepsilon e_i(t)\mathcal{F}\left(e_i(t)\right)\leqslant 0$。

由于$V_i\left(T_p\right)=0$，此时$e_i(t)=0$。因此，式(10)的计算误差能实现预设时间收敛。

将误差动态中的可调参数设置为$\varepsilon=1$，并将$V_i(t)=\dfrac{e_i^2(t)}{2}$代入式(13)，可得式(10)的计算误差为：

$$e_i(t)=\begin{cases}e_i(0)\left(\dfrac{T_p-t}{T_p}\right)^k, & t\in\left[0,T_p\right)\\ 0, & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases}\tag{14}$$

当$k>2$时，对式(14)分别求一阶与二阶导数可得：

$$\dot{e}_i(t)=\begin{cases}-\dfrac{ke_i(0)}{T_p}\left(\dfrac{T_p-t}{T_p}\right)^{k-1}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ 0, & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases}\tag{15}$$

$$\ddot{e}_i(t)=\begin{cases}\dfrac{k(k-1)e_i(0)}{T_p^2}\left(\dfrac{T_p-t}{T_p}\right)^{k-2}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ 0, & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases}\tag{16}$$

由式(15)和式(16)可知，误差在$t=T_p$处满足$\dot{e}_i\left(T_p\right)=\ddot{e}_i\left(T_p\right)=0$，这说明式(10)的计算误差在$t=T_p$处平滑收敛。同时，误差在$t=0$处的一阶、二阶导数均不为0，因此误差轨迹在$t\in(0,+\infty)$上二阶连续可导，即具有$C^2$连续性。当$k=1$时，平滑预设时间激活函数退化为PTAF Ⅰ，经计算，此时误差在$t=T_p$处无法平滑收敛。综上，$k>2$是保证式(10)的计算误差能在预设时间处满足二阶可导的必要条件。特别地，随着k的增大，误差轨迹的光滑性阶数随之提高。证毕。

增益k对计算误差在预设时间处平滑性的影响

如表1所示，其中，C^n表示n阶连续可导，$\lceil k \rceil$表示不小于实数k的最小整数。

2.2 全程平滑预设时间ZNN模型

在工程实际中，若执行器速度在初始时刻发生突变，可能引发关节冲击造成机械磨损。为满足初始与预设时刻双端平滑过渡的需求，本节进一步提出全程平滑预设时间激活函数为：

$$\phi_2(x)=\begin{cases}\dfrac{\mu t^2}{\left(T_p-t\right)\left(T_p^2+3T_pt+6t^2\right)}x, & t\in\left[0,T_p\right)\\ \mathcal{F}(x), & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{17}$$

其中，$\mu>20$为平滑增益，将式(17)代入式(5)中，得到一种具有全程平滑预设时间收敛特性的WP-SPTZNN模型。

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\begin{cases}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)\right)\dot{\boldsymbol{y}}(t)-\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)-\\ \varepsilon\dfrac{\mu t^2\boldsymbol{E}(t)}{\left(T_p-t\right)\left(T_p^2+3T_pt+6t^2\right)}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)\right)\dot{\boldsymbol{y}}(t)-\\ \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)-\varepsilon\mathcal{F}\left(\boldsymbol{E}(t)\right), & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{18}$$

定理2 采用式(18)求解TVNO问题式(1)，对于$\mu>20$及有限初值$\boldsymbol{E}(0)$，式(18)的计算误差可在预设时间T_p处收敛于0，且误差轨迹在区间$t\in\left[0,+\infty\right)$上至少具有$C^2$连续性。

证明 构造李雅普诺夫函数$V_i(t)=\dfrac{e_i^2(t)}{2}$，将其对时间求导可得：

$$\dot{V}_i(t)=e_i(t)\dot{e}_i(t)=-\varepsilon e_i(t)\phi_2\left(e_i(t)\right) \tag{19}$$

故式(18)是全局渐近收敛的。下面将分区间讨论WP-SPTZNN模型的收敛性能。

（1）当$t\in\left[0,T_p\right)$时，将式(17)代入式(19)可得：

$$\dot{V}_i(t)=-2\varepsilon\frac{\mu t^2V_i(t)}{\left(T_p-t\right)\left(T_p^2+3T_pt+6t^2\right)} \tag{20}$$

对式(20)积分可得：

$$V_i(t)=V_i(0)\left(\frac{T_p-t}{T_p}\right)^{\frac{\varepsilon\mu}{5}}\left(\frac{T_p^2+3T_pt+6t^2}{T_p^2}\right)^{\frac{\varepsilon\mu}{15}} \tag{21}$$

因此，当$t\to T_p$时，$e_i(t)\to 0$。

（2）当$t\in\left[T_p,+\infty\right)$时，$\dot{V}_i(t)=-\varepsilon e_i(t)\mathcal{F}\left(e_i(t)\right)$，与定理1中的推导过程类似，可得式(18)的计算误差能实现预设时间收敛。

将误差动态中的可调参数设置为$\varepsilon=1$并将$V_i(t)=\dfrac{e_i^2(t)}{2}$代入式(21)，可得式(18)的计算误差为：

$$e_i(t)=\begin{cases}e_i(0)\left(\dfrac{T_p-t}{T_p}\right)^{\frac{\mu}{10}}\left(\dfrac{T_p^2+3T_pt+6t^2}{T_p^2}\right)^{\frac{\mu}{30}}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ 0, & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{22}$$

当$\mu>20$时，对式(22)分别求一阶与二阶导数可得：

$$\dot{e}_i(t)=\begin{cases}-\dfrac{\mu e_i(0)t^2}{T_p^3}\left(\dfrac{T_p-t}{T_p}\right)^{\frac{\mu}{10}-1}\times\\ \left(\dfrac{T_p^2+3T_pt+6t^2}{T_p^2}\right)^{\frac{\mu}{30}-1}, & t\in\left[0,T_p\right)\\ 0, & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{23}$$

表1 增益k对计算误差在预设时间处平滑性的影响

增益k范围	误差导数			误差二阶导数			误差连续性
	$t\to T_p^-$/s	$t\to T_p^+$/s	连续性	$t\to T_p^-$/s	$t\to T_p^+$/s	连续性	
$k\in(0,1)$	∞	0	不连续	—	—	—	C^0连续
$k=1$	$-\dfrac{e_i(0)}{T_p}$	0	不连续	—	—	—	C^0连续
$k\in(1,2)$	0	0	连续	∞	0	不连续	C^1连续
$k=2$	0	0	连续	$\dfrac{2e_i(0)}{T_p^2}$	0	不连续	C^1连续
$k\in(2,+\infty)$	0	0	连续	0	0	连续	$C^{\lceil k\rceil-1}$连续

$$\ddot{e}_i(t)=\begin{cases}-\left(\dfrac{t^2}{T_p^3}\left(\dfrac{T_p-t}{T_p}\right)^{\frac{\mu}{10}-2}g_1(t)+2tg_2(t)\right)\times \\ \dfrac{\mu e_i(0)}{T_p^3}, & t\in\left[0,T_p\right) \\ 0, & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{24}$$

其中，$g_1(t)=\left(\dfrac{T_p^2+3T_pt+6t^2}{T_p^2}\right)^{\frac{\mu}{30}-2}\times(-\mu t^2-2T_p^2-6tT_p+18t^2)$，$g_2(t)=\left(\dfrac{T_p^2+3T_pt+6t^2}{T_p^2}\right)^{\frac{\mu}{30}}\left(\dfrac{T_p-t}{T_p}\right)^{\frac{\mu}{10}-1}$。由式(23)和式(24)可知，误差在 $t=T_p$ 处满足 $\dot{e}_i\left(T_p\right)=\ddot{e}_i\left(T_p\right)=0$，且在 $t=0$ 处满足 $\dot{e}_i(0)=\ddot{e}_i(0)=0$。这表明式(18)的计算误差在 $t\in\left[0,+\infty\right)$ 上具有 C^2 连续性。因此，$\mu>20$ 是保证该模型计算误差能在预设时间处满足二阶可导的必要条件。特别地，随着 μ 的增大，误差轨迹的光滑性阶数随之提高。证毕。

增益 μ 对计算误差在预设时间处平滑性的影响如表 2 所示。此外，无论 μ 取何正值，在 $t=0$ 处，计算误差的一阶、二阶导数均为 0。

值得注意的是，平滑增益的选取对模型性能具有重要影响。若增益过小，无法保证误差导数的连续性，可能引发执行器抖动，不利于硬件实现；若增益过大，虽能进一步提高误差轨迹的光滑阶数，但会放大初始误差对系统的影响，此外，过大的增益可能超出实际工程硬件允许的最大值。因此，平滑增益应在满足理论阈值（$k>2$，$\mu>20$）的前提下合理选取，以在保证误差轨迹光滑性的同时兼顾工程可实现性。

实际工程应用中，外部噪声客观存在，这会影响网络的收敛精度。因此，鲁棒性能也是评价 ZNN 模型的重要指标。当系统中存在噪声时，式(18)可以被重新表示为：

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\begin{cases}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)\right)\dot{\boldsymbol{y}}(t)- \\ \varepsilon\dfrac{\mu t^2\boldsymbol{E}(t)}{\left(T_p-t\right)\left(T_p^2+3T_pt+6t^2\right)}- \\ \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)+\boldsymbol{N}(t), & t\in\left[0,T_p\right) \\ \left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)\right)\dot{\boldsymbol{y}}(t)- \\ \boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)-\varepsilon\mathcal{F}\left(\boldsymbol{E}(t)\right)+\boldsymbol{N}(t), & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{25}$$

其中，$\boldsymbol{N}(t)$ 表示外部噪声。为提升式(25)对噪声的抑制能力，采用如下具有抗噪能力的激活函数[26]：$\mathrm{F}(x)=\gamma\left(1+\beta\arctan|x|\right)\times\left(1+x^2\right)\mathrm{sgn}(x)$，其中 $\gamma=\gamma_r+\gamma_c$，γ_r 用于抵抗噪声干扰，γ_c 为剩余增益。关于式(25)的鲁棒性能，有如下定理。

定理 3　采用式(25)求解式(1)，当系统受到有界时变噪声 $\boldsymbol{N}(t)$ 干扰，其中每个元素满足 $|n_i(t)|\leqslant\Delta$ 且 $\varepsilon\gamma_r\geqslant\Delta$ 时，对于 $\mu>20$，式(25)的计算误差可在预设时间 T_p 处收敛于 0，且误差轨迹在区间 $(0,+\infty)$ 上至少具有 C^2 连续性。

证明　当系统中存在有界噪声 $\boldsymbol{N}(t)$ 时，式(25)的误差动态方程可以被重新表示为：

$$\dot{e}_i(t)=-\varepsilon\cdot\phi_2\left(e_i(t)\right)+n_i(t) \tag{26}$$

表 2　　**增益 μ 对计算误差在预设时间处平滑性的影响**

增益 μ 范围	误差导数			误差二阶导数			误差连续性
	$t\to T_p^-$/s	$t\to T_p^+$/s	连续性	$t\to T_p^-$/s	$t\to T_p^+$/s	连续性	
$\mu\in(0,10)$	∞	0	不连续	—	—	—	C^0 连续
$\mu=10$	$-\dfrac{10^{\frac{1}{3}}e_i(0)}{T_p}$	0	不连续	—	—	—	C^0 连续
$\mu\in(10,20)$	0	0	连续	∞	0	不连续	C^1 连续
$\mu=20$	0	0	连续	$\dfrac{2\times10^{\frac{2}{3}}e_i(0)}{T_p^2}$	0	不连续	C^1 连续
$\mu\in(20,+\infty)$	0	0	连续	0	0	连续	$C^{\left\lceil\frac{\mu}{10}\right\rceil-1}$ 连续

构造李雅普诺夫函数$V_i(t)=\left|e_i(t)\right|$，对时间求导并结合式(26)可得：

$$\dot{V}_i(t)=\left(-\varepsilon\phi_2\left(e_i(t)\right)+n(t)\right)\mathrm{sgn}\left(e_i(t)\right)=-\varepsilon\phi_2\left(\left|e_i(t)\right|\right)+n(t)\mathrm{sgn}\left(e_i(t)\right) \tag{27}$$

（1）当$t\in\left[0,T_p\right)$时，结合李雅普诺夫函数，将式(17)代入式(27)可得：

$$\dot{V}_i(t)\leqslant-\frac{\varepsilon\mu t^2\cdot V_i(t)}{\left(T_p-t\right)\left(T_p^2+3T_pt+6t^2\right)}+\Delta \tag{28}$$

求解常微分不等式(28)，得到：

$$V_i(t)\leqslant \mathrm{e}^{\frac{\varepsilon\mu}{10}\ln\left[\left(\frac{T_p-t}{T_p}\right)\left(\frac{T_p^2+3T_pt+6t^2}{T_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]}\times\left(V_i(0)+\int_0^t\Delta\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon\mu}{10}\ln\left[\left(\frac{T_p-\tau}{T_p}\right)\left(\frac{T_p^2+3T_p\tau+6\tau^2}{T_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]}\mathrm{d}\tau\right)=\frac{V_i(0)}{u(t)}+\Delta\frac{\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau}{u(t)} \tag{29}$$

其中，$u(t)=\left[\left(\frac{T_p-t}{T_p}\right)\left(\frac{T_p^2+3T_pt+6t^2}{T_p^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-\frac{\varepsilon\mu}{10}}$，当$t\to T_p$时，式(29)中的第一项$\frac{V_i(0)}{u(t)}\to 0$，但第二项不易直接计算，下面将对此进行讨论。

① 当$\lim\limits_{t\to T_p}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau=C$，其中$C\in R$是未知常数时，由于$\lim\limits_{t\to T_p}u(t)=+\infty$，因此$\lim\limits_{t\to T_p}\frac{\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau}{u(t)}=0$。

② 当$\lim\limits_{t\to T_p}\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau=\infty$时，由洛必达法则可得：

$$\lim_{t\to T_p}\frac{\int_0^t u(\tau)\mathrm{d}\tau}{u(t)}=\lim_{t\to T_p}\frac{\left(T_p-t\right)\left(T_p^2+3T_pt+6t^2\right)}{\varepsilon\mu t^2}=0 \tag{30}$$

综合两种情况，由式(29)可得，当$t\to T_p$时，$e_i(t)\to 0$。

（2）当$t\in\left[T_p,+\infty\right)$时，将式(17)代入式(27)中可得：

$$\dot{V}_i(t)=-\varepsilon\gamma_c\left(1+V_i^2(t)\right)\left(1+\beta\arctan\left|V_i(t)\right|\right)-\varepsilon\gamma_r\left(1+V_i^2(t)\right)\left(1+\beta\arctan\left|V_i(t)\right|\right)+n(t)\mathrm{sgn}\left(e_i(t)\right)\leqslant-\varepsilon\gamma_c\left(1+V_i^2(t)\right)\left(1+\beta\arctan\left|V_i(t)\right|\right)-\varepsilon\gamma_r+\Delta\leqslant 0 \tag{31}$$

与定理1中的推导过程类似，可得式(25)的计算误差能实现预设时间收敛。

将误差动态中的可调参数设置为$\varepsilon=1$，与式(28)和式(29)的推导过程类似，可得式(25)的计算误差为：

$$e_i(t)=\begin{cases}v(t)\left(e_i(0)+\int_0^t n(\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\right), & t\in\left[0,T_p\right)\\ 0, & t\in\left[T_p,+\infty\right)\end{cases} \tag{32}$$

其中，$v(t)=\frac{1}{u(t)}$。由上述分析过程可知$v\left(T_p\right)=\dot{v}\left(T_p\right)=\ddot{v}\left(T_p\right)=0$，因此，式(25)的计算误差在预设时间$t=T_p$处的一阶、二阶导数均为0，这意味着式(25)能在预设时间处平滑收敛。由于存在噪声，计算误差在初始时刻的导数不为0，因此误差轨迹在$(0,+\infty)$上二阶连续可导，且该光滑性阶数随μ的增大而提高。证毕。

综上所述，WP-SPTZNN在求解时变非线性优化问题时，若无外界噪声干扰，系统误差在预设时间处平滑收敛，且误差在$t\in[0,+\infty)$上至少为C^2连续。当存在噪声干扰时，WP-SPTZNN能抑制噪声并使误差在预设时间处平滑收敛，但计算误差的初态光滑性被非零扰动破坏，误差在$t\in(0,+\infty)$上至少为C^2连续。

3　数值仿真

本节针对TVNO问题和冗余机械臂重复运动规划问题进行仿真来验证所提ZNN模型和计算方案的有效性。

3.1　时变非线性优化问题

考虑TVNO问题为：

$$\begin{aligned}\min\quad & 0.5x_1(t)^2+\sin(0.1t)x_2(t)^2+\\ & 0.5x_3(t)^2+\cos(0.1t)x_4(t)^2\\ & \cos\left(0.1x_1(t)\right)\sin\left(0.1x_2(t)\right)+\sin\left(0.2x_3(t)\right)\times\\ & \cos\left(0.2x_4(t)\right)-0.05\sin(0.5t+2)=0,\\ \text{s.t.}\quad & \cos\left(0.2x_1(t)\sin\left(x_2(t)\right)\right)x_3(t)+x_2(t)\times\\ & \sin\left(0.2x_3(t)\cos\left(x_4(t)\right)\right)\\ & -0.05\sin(0.3t)\exp\left(x_1(t)+x_2(t)\right)=0\end{aligned}\tag{33}$$

由第 2 节可知，该 TVNO 问题可通过拉格朗日乘子法转化为矩阵方程，进而采用零化神经网络方法进行求解。本节将由式(6)~式(8)分别构建的 PTCZNN Ⅰ、PTCZNN Ⅱ、PTCZNN Ⅲ模型与提出的 SPTZNN、WP-SPTZNN 模型进行对比，以验证所提方法的有效性。5 种零化神经网络模型的可调参数均设置为 $\varepsilon = 1$，预设时间设置为 $T_p = 3$ s。平滑预设时间激活函数和全程平滑预设时间激活函数的平滑增益分别取 $k = 3$ 和 $\mu = 21$，其余参数选取 $p = 0.5$，$\xi = 1.5$。初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}(0)$ 分别设置为 $[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$ 和 $[0,0]^{\mathrm{T}}$。为降低网络计算复杂度，在无外界噪声干扰下，将式(9)和式(17)中的 $\mathcal{F}(x)$ 设置为线性激活函数。

5 种零化神经网络模型求解 TVNO 问题的结果如图 1~图 5 所示。图 1 为系统无外界噪声干扰下状态解的收敛过程，其中，黑色实线表示式(33)的理论状态解。由图 1 可知，对于相对较大的初始误差 $\boldsymbol{E}(0)$，5 种零化神经网络模型的状态解均能在预设时间处收敛至理论解并保持稳定，说明零化神经网络可精确求解 TVNO 问题。

为进一步比较所提模型的收敛性能，定义计算误差 $\varepsilon(t)=\left\|\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{y}(t),t\right)\right\|_2$。图 2 为无噪声环境下 5 种 ZNN 求解 TVNO 问题式(1)的计算误差。由图 2(a)可知，在预设时刻仅 PTCZNN Ⅱ的计算误差降低至 0.003，其余 4 种模型的计算误差均收敛于 0。由图 2(b)和图 2(c)可知，初始时刻处 WP-SPTZNN 计算误差的一阶、二阶导数均为 0。在预设时间处，PTCZNN Ⅰ计算误差的一阶导数跳变幅度达到 915，二阶导数跳变幅度达到 5×10^6，跳变幅度最大；PTCZNN Ⅱ和 PTCZNN Ⅲ计算误差的一阶导数跳变幅度达到 3，二阶导数跳变幅度达到 1.5×10^4，二者跳变幅度低于 PTCZNN Ⅰ；而 SPTZNN 和 WP-SPTZNN 计算误差的一阶、二阶导数值均为 0。上

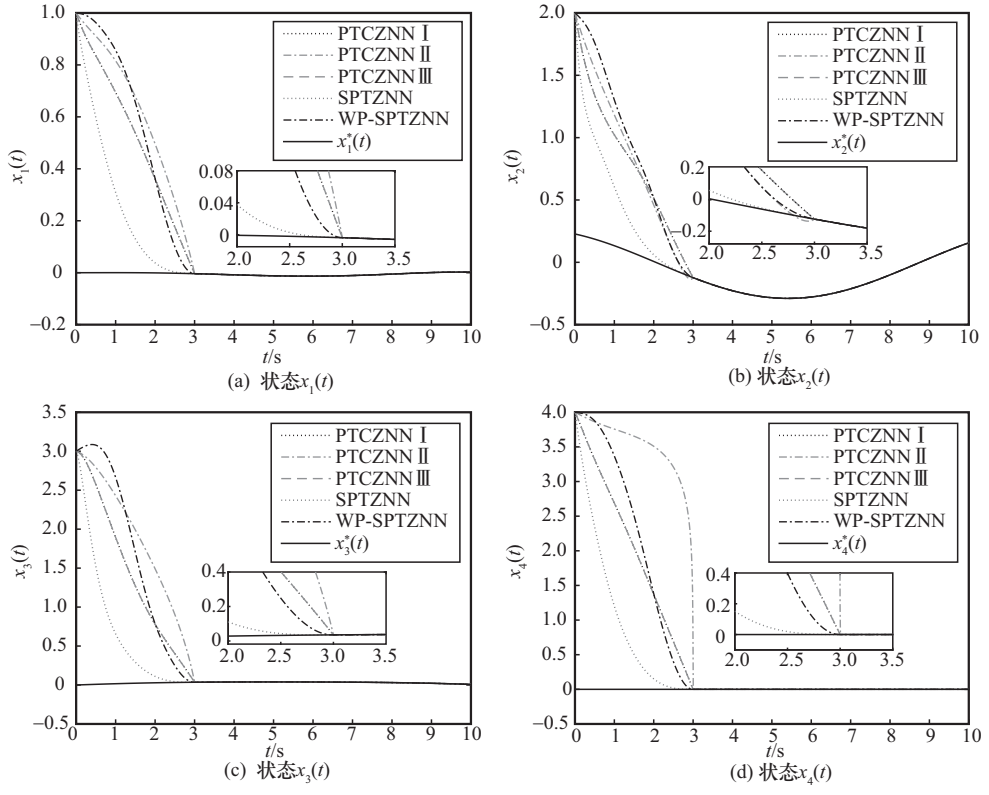
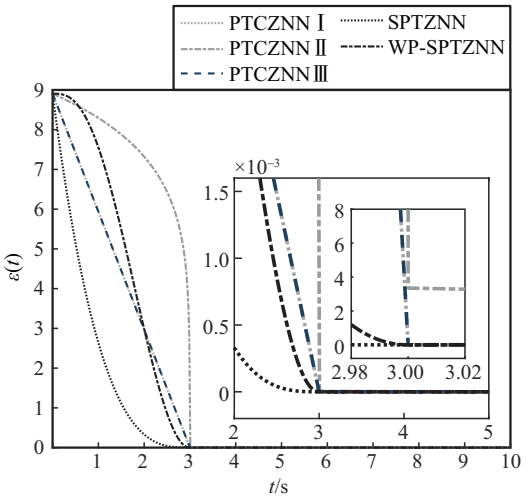
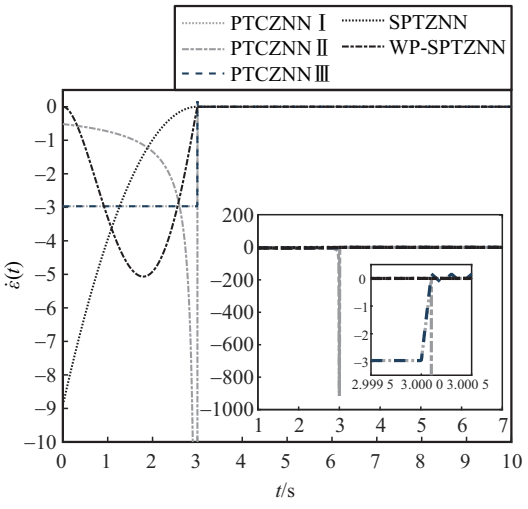


图 1　系统无外界噪声干扰下状态解的收敛过程

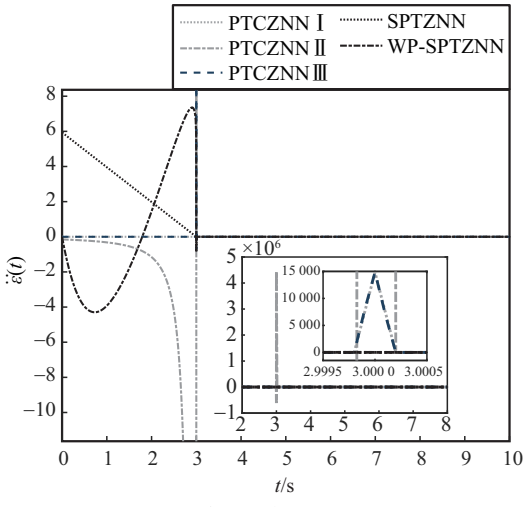
述结果验证了SPTZNN在预设时刻的平滑收敛特性和WP-SPTZNN的全程平滑收敛特性。



(a) 计算误差$\varepsilon(t)$



(b) 计算误差导数$\dot{\varepsilon}(t)$



(c) 计算误差二阶导数$\ddot{\varepsilon}(t)$

图2　无噪声环境下5种ZNN求解TVNO问题的计算误差

在实际工业应用中，外部噪声干扰可能会导致系统无法正常运行。为验证所提模型的抗噪能力，考虑有界噪声$n_i(t)=\cos(1.5t)$。为提高模型抑制噪声的能力，式(9)和式(17)中设置$\mathcal{F}(x)=\gamma(1+x^2)\left(\beta\arctan|x|+1\right)\mathrm{sgn}(x)$，参数选取$\gamma=2$，$\beta=2$。由于$\mathcal{F}(x)$中含有$\mathrm{sgn}(\cdot)$函数，该函数在零点处存在跳跃间断点，受执行器惯性、传感器延迟、数字采样等物理因素制约，实际系统可能发生抖振现象。为避免这一现象，需采用连续光滑函数近似替代$\mathcal{F}(x)$中的符号项，如式(34)所示。该近似替代方法的有效性已得到完整证明[27]，此处不再赘述。

$$\gamma\,\mathrm{sgn}(x)\approx\frac{\gamma^2 x}{\gamma|x|+\upsilon}\tag{34}$$

其中，$\upsilon>0$为很小的常数。图3为有界噪声干扰下5种ZNN求解TVNO问题的计算误差。由图3(a)可知，PTCZNN Ⅰ和PTCZNN Ⅱ无法有效抑制有界噪声，而PTCZNN Ⅲ、SPTZNN和WP-SPTZNN于预设时刻后计算误差恒为0，能有效抑制有界噪声。从图3(b)可知，PTCZNN Ⅲ的计算误差导数在预设时间后出现抖振，而SPTZNN和WP-SPTZNN的计算误差导数保持为0，收敛过程更平滑，表明所提模型在有界噪声环境下仍能实现误差在预设时刻的平滑收敛。

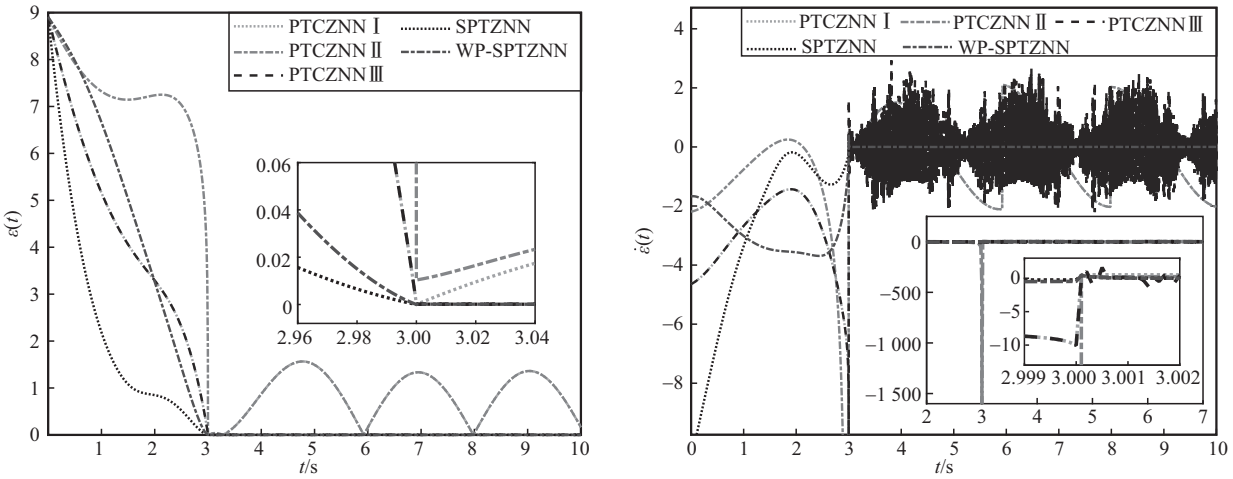
为说明平滑增益对计算误差收敛过程平滑性的影响，在无外界噪声干扰下，设置不同增益值求解式(33)。不同增益k下SPTZNN计算误差收敛过程如图4所示，当$k=0.5$时，预设时间处误差为0.01，大于其他增益下的误差值；当$0<k\leqslant 2$时，误差及其导数的收敛过程不平滑；当$k=2.5$时，误差能在预设时间处平滑收敛，结果与表1一致。这验证了$k>2$是保证SPTZNN计算误差能在预设时间处平滑收敛的必要条件。不同增益μ下WP-SPTZNN计算误差收敛过程如图5所示，类似地，结果验证了$\mu>20$是保证WP-SPTZNN计算误差能在预设时间处平滑收敛的必要条件。

3.2　冗余机械臂重复运动规划

考虑n自由度冗余机械臂，其关节角度和末端执行器位置关系为：

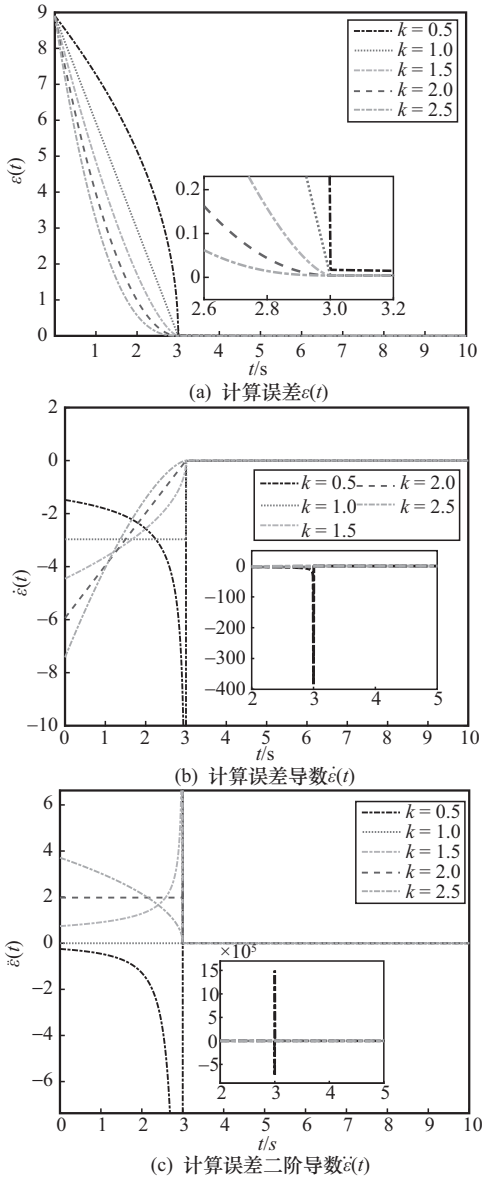
$$\boldsymbol{r}(t)=f\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\tag{35}$$

其中，$\boldsymbol{r}(t)\in\mathbb{R}^m$为$t$时刻机械臂末端执行器在笛卡儿坐标系下的位置向量，$\boldsymbol{\theta}(t)\in\mathbb{R}^n$为对应时刻的关节角度向量，$f\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$表示关节角度与



(a) 计算误差$\varepsilon(t)$　　(b) 计算误差导数$\dot{\varepsilon}(t)$

图3　有界噪声干扰下5种ZNN求解TVNO问题的计算误差

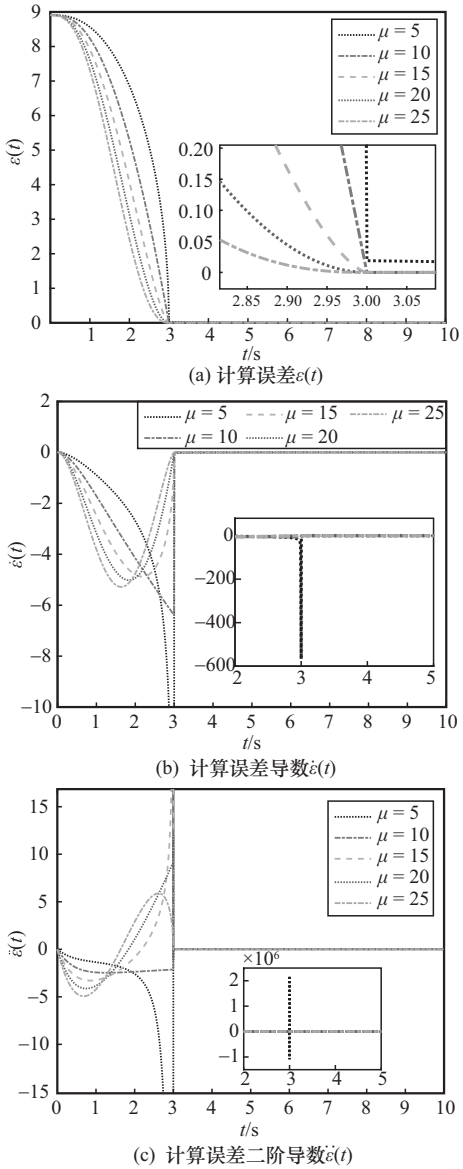


(a) 计算误差$\varepsilon(t)$

(b) 计算误差导数$\dot{\varepsilon}(t)$

(c) 计算误差二阶导数$\ddot{\varepsilon}(t)$

图4　不同增益k下SPTZNN计算误差收敛过程



(a) 计算误差$\varepsilon(t)$

(b) 计算误差导数$\dot{\varepsilon}(t)$

(c) 计算误差二阶导数$\ddot{\varepsilon}(t)$

图5　不同增益μ下WP-SPTZNN计算误差收敛过程

机械臂末端位置间的非线性映射。由于式(35)的非线性和冗余性，通常难以根据$\boldsymbol{r}(t)$反求解出$\boldsymbol{\theta}(t)$，需在关节角速度层面考虑问题。式(35)两边同时对时间求导，可得：

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t)=\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \tag{36}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{r}}(t)\in\mathbb{R}^m$为$t$时刻机械臂末端执行器在笛卡儿坐标系下的速度向量，$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\in\mathbb{R}^{m\times n}$表示雅可比矩阵，$\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\in\mathbb{R}^n$为对应时刻的关节角速度向量。考虑到关节角漂移现象，并为了实现机械臂末端执行器误差的预设时间收敛，构建以下平滑重复运动规划方案。

$$\begin{aligned}&\min\quad \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)+\alpha\left(\boldsymbol{\theta}(t)-\boldsymbol{\theta}_d(0)\right)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}_d(t)+\kappa\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{r}_d(t)-f\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\right)\end{aligned} \tag{37}$$

其中，$\alpha>0$和$\kappa>0$是可调参数，$\boldsymbol{\theta}_d(0)\in\mathbb{R}^n$表示期望的初始关节角度向量，$\boldsymbol{r}_d(t)\in\mathbb{R}^m$和$\dot{\boldsymbol{r}}_d(t)\in\mathbb{R}^m$分别表示末端执行器的期望位置向量和期望速度向量，$\boldsymbol{\Psi}(\cdot):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$为约束修正函数。由式(1)和式(3)可知，TVNO 问题可以转化为时变矩阵方程求解问题，则式(37)可以转化为：

$$\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{Y}(t)+\boldsymbol{P}(t)=0 \tag{38}$$

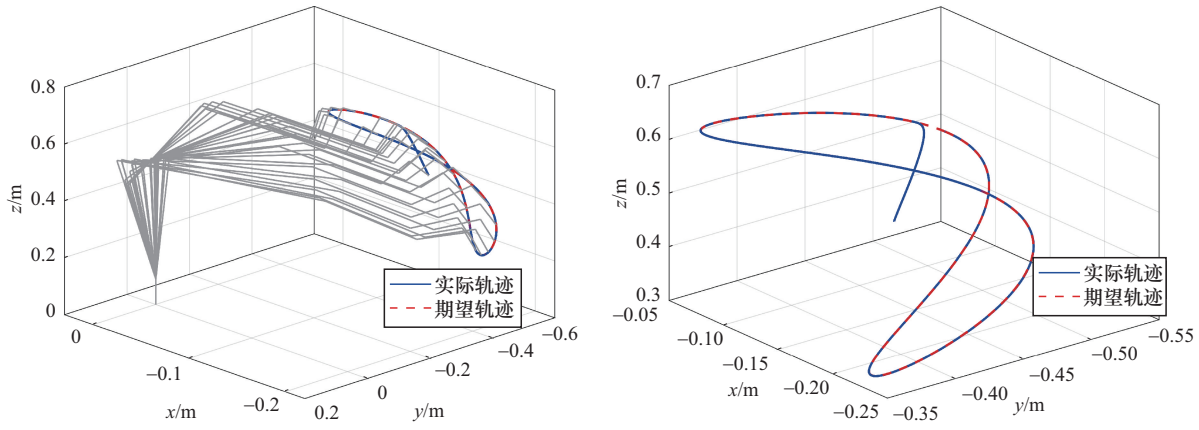
其中，$\boldsymbol{W}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\\ \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right) & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Y}(t)=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\\ \boldsymbol{\lambda}(t)\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}(t)=\begin{bmatrix}\alpha\left(\boldsymbol{\theta}(t)-\boldsymbol{\theta}_d(0)\right)\\ -\dot{\boldsymbol{r}}_d(t)-\kappa\boldsymbol{\Psi}\left(\boldsymbol{r}_d(t)-f\left(\boldsymbol{\theta}(t)\right)\right)\end{bmatrix}$。

定义误差$\boldsymbol{E}(t)=\boldsymbol{W}(t)\boldsymbol{Y}(t)+\boldsymbol{P}(t)$，则式(38)可通过构造误差动态方程$\dot{\boldsymbol{E}}(t)=-\varepsilon\cdot\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{E}(t)\right)$进行求解。

选用自由度$n=6$的UR5冗余机械臂进行重复运动规划仿真，采用式(18)作为求解器。考虑到机械臂的初始位置可能不在期望运动轨迹上，将末端执行器的初始位置设为$\boldsymbol{\theta}(0)=\boldsymbol{\theta}_d(0)+\Delta\boldsymbol{\theta}(0)$，其中期望初始角度$\boldsymbol{\theta}_d(0)=\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},0\right]^{\mathrm{T}}$，$\Delta\boldsymbol{\theta}(0)=[0,0.15,-0.25,0,0,0]^{\mathrm{T}}$。期望运动轨迹为李萨如曲线，每个运动周期路径跟踪任务的持续时间为10 s。可调参数设置为$\alpha=\kappa=1$，步长设置为$\tau=0.001$。约束修正函数与式(17)一致，WP-SPTZNN模型中的预设时间设置为$T_p=1$ s，增益设置为$\mu=30$，其他参数设置与4.1节数值算例中保持一致。

需要注意的是，本文所提预设时间零化神经网络在实际应用中需要进行离散化处理，而离散化实现时预设时间T_p的选取至关重要。若T_p过小，则必须采用足够高的采样频率才能保证误差收敛精度，且过小的T_p会导致误差变化率增大，这在机械臂上体现为较高的关节角速度或角加速度，这些要求通常受到硬件性能的限制；若T_p过大，则误差收敛过程缓慢，这对采样频率要求较低，但容易累积误差。因此，在实际应用中需要根据硬件性能选取合适的T_p。

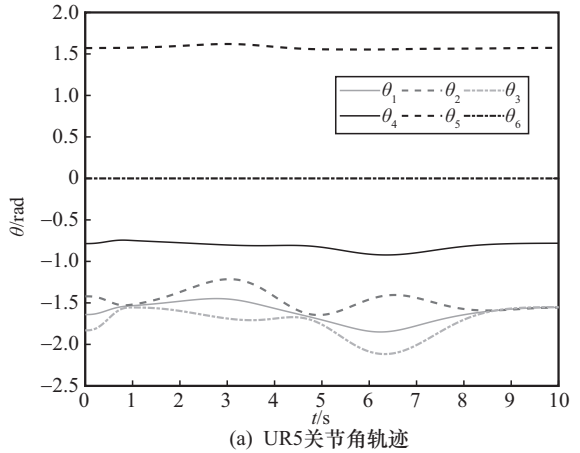
式(18)求解冗余机械臂重复运动规划的结果如图6和图7所示。图6为式(18)求解冗余机械臂重复运动规划时各关节的运动轨迹，其中末端执行器从初始位置出发，逐渐移动至期望轨迹，完成一个周期的轨迹跟踪任务，验证了所提方法的有效性。图7



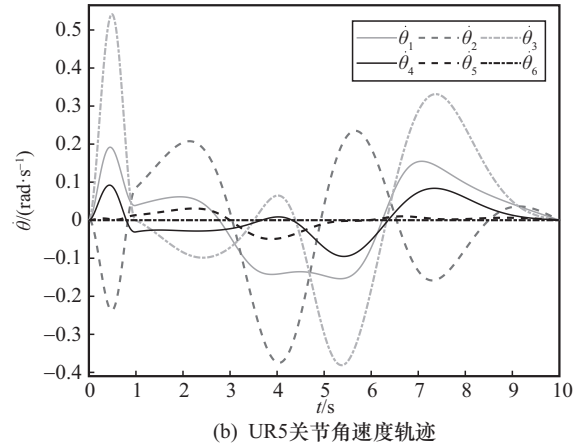
(a) 关节运动轨迹　　(b) 末端执行器运动轨迹

图6　式(18)求解冗余机械臂重复运动规划时各关节的运动轨迹

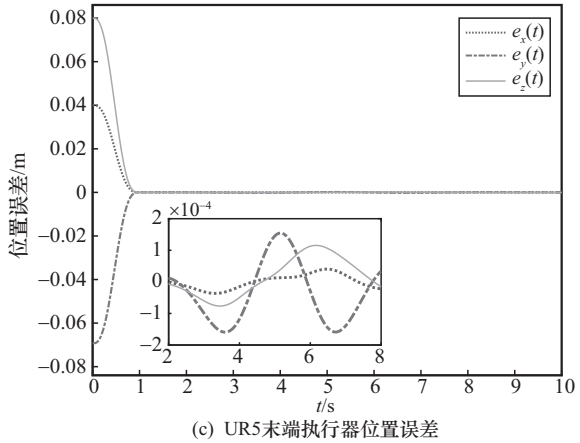
为机械臂完成重复运动规划任务时各种参数变化曲线。由图7(a)和图7(b)可知，关节角在任务周期结束时收敛至期望初始角度$\boldsymbol{\theta}_d(0)$，关节角速度在任务周期的起始与终止时刻均为0，且角度与角速度轨迹平滑连续，说明冗余机械臂能有效完成轨迹跟踪任务。图7(c)给出机械臂末端执行器沿xyz三轴的位置误差$e_r(t)$，各轴误差均在预设时刻收敛并稳定在10^{-4}量级。



(a) UR5关节角轨迹



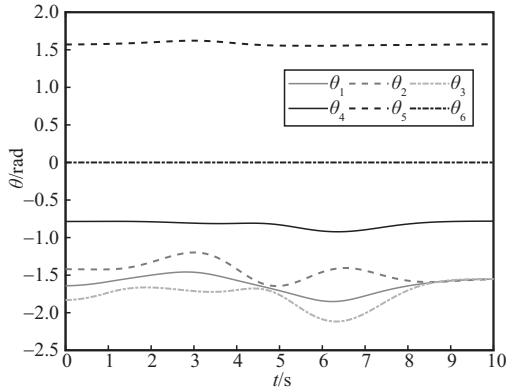
(b) UR5关节角速度轨迹



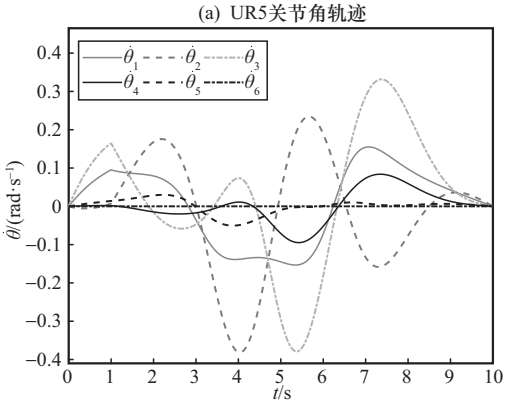
(c) UR5末端执行器位置误差

图7　机械臂完成重复运动规划任务时各种参数变化曲线

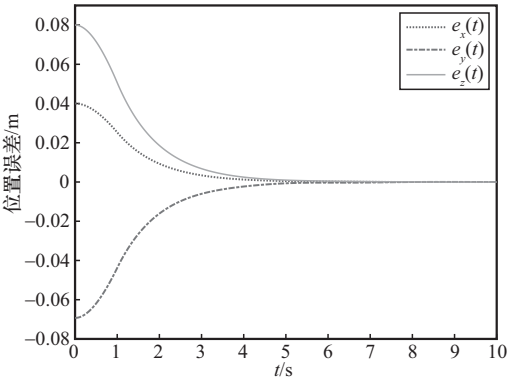
为说明所提方案的有效性，给出采用式(8)的PTCZNN Ⅰ模型求解常规冗余机械臂重复运动规划方案的结果，其中约束修正函数为线性激活函数。如图8(b)所示，预设时刻t = 1 s处关节角速度出现尖峰，表明其变化不平滑，这可能导致无法顺利完成轨迹跟踪任务。由图8(c)给出的机械臂末端执行器位置误差轨迹可知，因常规计算方案中位置误差部分的线性设计，误差收敛时间约为8 s，显著高于本文所提方案中1 s的收敛时间。综上所述，通过引入非线性约束修正函数，所提方案可实现机械臂末端执行器位置误差在预设时刻的平滑收敛，提升轨迹跟踪精度。



(a) UR5关节角轨迹



(b) UR5关节角速度轨迹



(c) UR5末端执行器位置误差

图8　采用PTCZNN Ⅰ模型求解常规冗余机械臂重复运动规划

4 结束语

本文提出两种平滑预设时间ZNN模型。相较于现有预设时间ZNN，所提模型在求解时变非线性优化问题时实现了误差轨迹的平滑收敛。理论分析了SPTZNN和WP-SPTZNN模型的预设时间收敛性，证明了SPTZNN模型误差在预设时间处的平滑性以及WP-SPTZNN模型误差在全时间区间的平滑性，并总结了平滑增益与误差轨迹平滑性之间的关系。仿真结果表明，所提模型可实现时变非线性优化问题的预设时间平滑求解；同时，所提平滑重复运动规划计算方案在保证机械臂有效完成轨迹跟踪任务的前提下，实现了末端执行器位置误差在预设时刻的平滑收敛。未来将针对更复杂的噪声环境，进一步研究鲁棒性更强的预设时间ZNN模型，并考虑动力学特性对机械臂重复运动规划的影响。

参考文献：

[1] Zhang B, Li S, Chen X L, et al. A novel zeroing neural model for solving dynamic matrix Moore-Penrose inverse and its application to visual servoing control of manipulator[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2024, 73: 2517213.

[2] Li Y W, Liu J X, Xiao L, et al. A self-learning noise-resistant zeroing neural network for dynamic equations and its applications[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2025, 55(12): 9030-9042.

[3] Xiao L, Dai J H, Jin L, et al. A noise-enduring and finite-time zeroing neural network for equality-constrained time-varying nonlinear optimization[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(8): 4729-4740.

[4] Zhang Y N, Jiang D C, Wang J. A recurrent neural network for solving Sylvester equation with time-varying coefficients[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2002, 13(5): 1053-1063.

[5] Miao P, Shen Y J, Xia X H. Finite time dual neural networks with a tunable activation function for solving quadratic programming problems and its application[J]. Neurocomputing, 2014, 143: 80-89.

[6] Cao M R, Xiao L, Zuo Q Y, et al. A fixed-time robust ZNN model with adaptive parameters for redundancy resolution of manipulators[J]. IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence, 2024, 8(6): 3886-3898.

[7] Tang W S, Cai H, Xiao L, et al. A predefined-time adaptive zeroing neural network for solving time-varying linear equations and its application to UR5 robot[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2025, 36(3): 4703-4712.

[8] Song Y D, Wang Y J, Holloway J, et al. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time[J]. Automatica, 2017, 83: 243-251.

[9] Shakouri A, Assadian N. A framework for prescribed-time control design via time-scale transformation[J]. IEEE Control Systems Letters, 2022, 6: 1976-1981.

[10] Zhang J, Shi M, Peng C, et al. A novel adaptive prescribed-time controller for uncertain systems with unknown non-smooth nonlinearities[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2025, 22: 22018-22027.

[11] Orlov Y, Kairuz R I V. Autonomous output feedback stabilization with prescribed settling-time bound[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(4): 2452-2459.

[12] Zhang K K, Zhou B, Hou M Z, et al. Prescribed-time stabilization of *p*-normal nonlinear systems by bounded time-varying feedback[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(1): 421-450.

[13] Su J, Song Y D. Prescribed-time control with bounded feedback gain: a nonscaling and structural adaptation-based approach[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2025, 55(4): 2580-2589.

[14] Wang T L, Wang Y F, Hua C, et al. Prescribed-time convergence noise-tolerant zeroing neural network for multi-robot position management and coordination[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2025, 162: 112072.

[15] Miao P, Huang H H. A novel prescribed-time ZNN for solving time-varying complex Sylvester equation and application to pseudo-inverse[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2025, 150: 109021.

[16] Deng J H, Li C Q, Chen R L, et al. A novel variable-parameter variable-activation-function finite-time neural network for solving joint-angle drift issues of redundant-robot manipulators[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2025, 30(2): 1578-1589.

[17] Zhang F, Su Z M, Xie Z T, et al. Discrete-time noise-resilient neural dynamics for model predictive motion-force control of redundant manipulators[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2024, 20(11): 13101-13112.

[18] Zhang M Y, Guo J J, Zhang Z J. A distributed slack barrier recurrent neural network for multiple redundant manipulators collaborative system in obstacles environment[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2025, 55(9): 6299-6311.

[19] Li W B, Pan Y P. A dini-derivative-aided zeroing neural network for time-variant quadratic programming involving multi-type constraints with robotic applications[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2024, 35(9): 12482-12493.

[20] Sun M X, Zhang Y, Wu Y X, et al. On a finitely activated terminal RNN approach to time-variant problem solving[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, 33(12): 7289-7302.

[21] Zhong G M, Wang L M, Sun M X. An initial-rectifying-constraint optimization scheme for repetitive motion planning by using prescribed-time zeroing neural networks[J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2025, 22: 11087-11098.

[22] 汪黎明, 仲国民, 孙明轩, 等. 有限值终态零化神经网络及其在机器人运动规划中的应用[J]. 计算机科学, 2025, 52(5): 270-280.
Wang L M, Zhong G M, Sun M X, et al. Finitely-valued terminal zeroing neural networks with application to robotic motion planning[J]. Computer Science, 2025, 52(5): 270-280.

[23] Song Y D, Ye H F, Lewis F L. Prescribed-time control and its latest developments[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2023, 53(7): 4102-4116.

[24] Li W B, Ma X, Luo J W, et al. A strictly predefined-time convergent neural solution to equality and inequality-constrained time-variant quadratic programming[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2021, 51(7): 4028-4039.
[25] Li W B, Guo C, Ma X, et al. A strictly predefined-time convergent and noise-tolerant neural model for solving linear equations with robotic applications[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2024, 71 (1): 798-809.
[26] 仲国民, 唐逸飞, 孙明轩. 用于有界噪声时变矩阵计算的终端零化神经网络[J]. 通信学报, 2024, 45(9): 55-67.
Zhong G M, Tang Y F, Sun M X. Terminal zeroing neural network for time-varying matrix computing under bounded noise[J]. Journal on Communications, 2024, 45(9): 55-67.
[27] Sun M X, Li X, Wang H. Constructive RNNs: an error-recurrence perspective on time-variant zero finding problem solving under uncertainty[PP]. V2. (2024-11-24) [2026-04-01]. arXiv: arXiv. 2411.07570.

[作者简介]



仲国民（1983– ），男，博士，浙江工业大学讲师，主要研究方向为系统辨识、迭代学习控制和神经计算。



林锐（2002– ），男，浙江工业大学硕士生，主要研究方向为机械臂运动规划和神经计算。



肖里坤（1999– ），男，浙江工业大学硕士生，主要研究方向为机械臂运动规划和神经计算。



孙明轩（1961– ），男，博士，浙江工业大学教授，主要研究方向为学习系统和神经计算等。